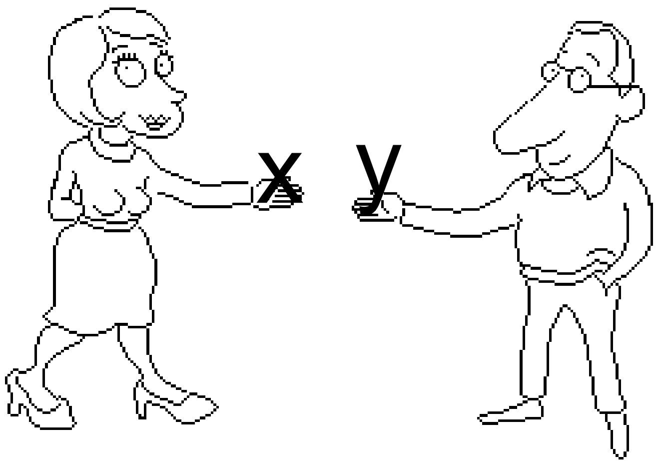
11 3º ESO

Si dispusiera de ocho horas para cortar un árbol, emplearía seis en afilar el hacha

Lincoln

Sistemas



ÍNDICE:

CAMELLOS DE MOJAMÉ

Un sultán árabe, *Mojamé I Sécame Después,* tenía 19 camellos que dejó en herencia a sus tres hijas: Anomra, Sarima y Lanítrope. (Para traducir los nombres árabes basta invertir la lectura por sílabas)

A la primera, por ser la mayor, la donaba la mitad de sus camellos.

A la segunda, la cuarta parte.

A la tercera, la quinta parte.

Cuando murió el pobre y fueron a hacer el reparto vieron que tenían que desguazar varios camellos puesto que debían repartirse de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2}\cdot 19 = \frac{19}{2} = 9 + \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4}\cdot 19 = \frac{19}{4} = 4 + \frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{5}\cdot 19 = \frac{19}{5} = 3 + \frac{4}{5}$$

Es decir, 9 camellos y medio para la primera, 4 camellos y tres cuartos para la segunda y 3 camellos y cuatro quintos para la segunda.

Ante el susto de los pobres animales fueron a consultarlo con el sabio del pueblo: Dotolobesa.

Como era sabio, sólo tenía un camello, y para solucionar el problema les dijo a las hermanas:

- Os veo tan apenadas que os voy a regalar mi camello para que podáis arreglaros.

Como las hermanas tenían gran confianza en el sabio se marcharon con los 20 camellos a ver si podían hacer el reparto. Y comenzaron la operación:

$$\frac{1}{2}\cdot 20 = \frac{20}{2} = 10$$
$$\frac{1}{4}\cdot 20 = \frac{20}{4} = 5$$
$$\frac{1}{5}\cdot 20 = \frac{20}{5} = 4$$

Ahora no tenían que destripar a ninguno y además les sobraba uno que en justicia devolvieron al sabio.

¿Cómo supo el sabio Dotolobesa que así resolverían el asunto? ¿Por qué les sobraba un camello en el reparto final? ¿Les sobraba también algo en el reparto inicial? ¿Qué fracciones les debía haber dado el padre para que no hubiesen tenido esos problemas?

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Hay problemas en los que existe más de una incógnita. Es decir, hay varias ecuaciones y varias incógnitas.

A cada incógnita se la designa con una letra diferente.

Por ejemplo, ¿cómo escribiríamos lo siguiente?:

"La suma de dos números es 12 y su diferencia es 2":

$$\left|\begin{array}{l} x - \text{un n°} \\ y - \text{otro n°} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 \text{ (la suma 12)} \\ x - y = 2 \text{ (la resta 2)} \end{cases}$$

Resulta un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$

¿Qué solución tiene este sistema?

Así pues, un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que se refieren al mismo problema. Estudiaremos los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Inventarse dos equivalentes.

Se llama solución al conjunto de valores que sustituidos en las incógnitas verifican las igualdades.

Resolución o método al proceso para llegar a la solución.

El objetivo de todos los métodos es obtener un sistema equivalente en el que aparezca una ecuación con una incógnita.

2. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Se llama método al proceso que seguimos para resolver un sistema. Es decir, para hallar su solución.

El objetivo de todos los métodos para resolver sistemas de ecuaciones es conseguir una ecuación con una sola incógnita.

El método de sustitución es el más frecuente para resolver sistemas. Es decir, para encontrar su solución.

PASOS A DAR: Veámoslo con el siguiente sistema: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

1. Se despeja una incógnita en una ecuación. **Fórmula de sustitución.**	x + y = 5 —> x = 5 – y	• Hemos despejado x en la primera ecuación.
2. Se sustituye en la otra ecuación.	2 **x** – y = 7 2 · (**5 – y**) – y = 7	• Hemos sustituido el valor de x en la segunda ecuación.
3. Se resuelve la ecuación resultante.	2 · (5 – y) – y = 7	• Ya tenemos una ecuación con una incógnita que era el objetivo.
4. Se sustituye en la fórmula de sustitución.		
5. Se redacta la solución:	x = y =	

Ejemplo 2.– Resuelve el sistema siguiendo los pasos anteriores: $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$

1. Se despeja una incógnita en una ecuación. **Fórmula de sustitución.**		• Despeja "y" en la primera ecuación.
2. Se sustituye en la otra ecuación.		• Sustituye el valor en la segunda.
3. Se resuelve la ecuación resultante.		• Resuelve la ecuación resultante.
4. Se sustituye en la fórmula de sustitución.		• Sustituye en la primera fórmula obtenida (Punto 1)
5. Se redacta la solución:	x = y =	

3. MÉTODO DE IGUALACIÓN

El objetivo es el mismo, conseguir una ecuación con una sola incógnita. Pero en este método se procede de otra manera.

Vamos a resolver el sistema: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones. **Fórmulas de igualación**.	$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$ Despeje $\begin{array}{l} \to x = 10 - y \\ \to x = 2 + y \end{array}$
2. Se igualan ambas incógnitas.	10 – y = 2 + y
3. Se resuelve ecuación resultante	
4. Se sustituye el valor hallado en una de las fórmulas del punto nº 1.	
5. Se redacta la solución:	x = y =

Ejemplo 2.– Resuelve el sistema por este método. : $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

1. Despeja la "y" en las dos ecuaciones. **Fórmulas de igualación**.	
2. Iguala ambos resultados.	
3. Se resuelve ecuación resultante	
4. Se sustituye el valor hallado en una de las fórmulas del punto nº 1.	
5. Se redacta la solución:	

4. MÉTODO DE REDUCCIÓN

Se trata en obtener uno equivalente multiplicando a las ecuaciones por números convenientes y sumando una a otra, de tal manera que en una de las ecuaciones se elimine una incógnita.

Por ejemplo,

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = -3 \\ -3x + y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Si las ecuaciones contienen denominadores se deben quitar antes de empezar a resolver el sistema.

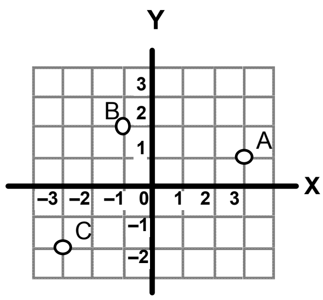
Por ejemplo,

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}x - 2y = 2 \\ 3x - \dfrac{5}{2}y = 7 \end{cases}$$

5. MÉTODO GRÁFICO

Ejes cartesianos

• Para situar un punto en el plano necesitamos dar dos referencias: la horizontal y la vertical. Son los ejes cartesianos. Por ejemplo,



• El punto A es el (3, 1).
• El punto B (
• El punto C
• El eje horizontal —X— se llama de abscisas.
• El eje vertical —Y— se llama de ordenadas.
• Todo punto tiene sus dos coordenadas. La abscisa y la ordenada.

Primero se da la coordenada X —horizontal— y después la coordenada Y —vertical—

El eje X se ordena de izda a dcha. Y el eje Y de abajo arriba. El cero es el mismo para los dos ejes y se llama origen de coordenadas.

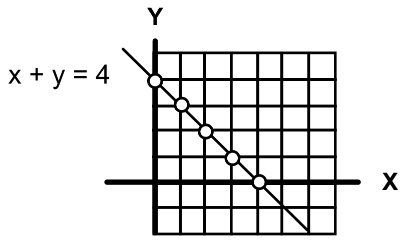
Soluciones de una ecuación con dos incógnitas

Las soluciones de una ecuación con 2 incógnitas forman una recta en el plano.

Por ejemplo las soluciones de la ecuación:

$$x + y = 4$$

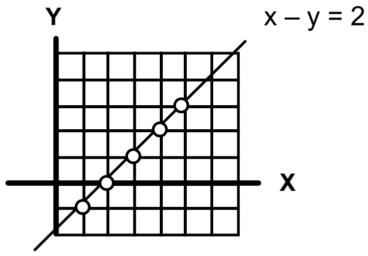
son: (0, 4); (1, 3); (2, 2); (3, 1); (4, 0);… que forman una recta.



Otro ejemplo sería la ecuación:

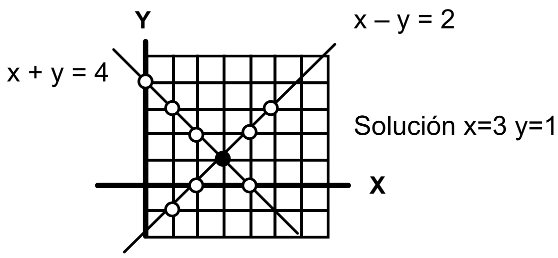
$$x - y = 2$$

cuyas soluciones son:



La solución del sistema es el punto de corte de ambas rectas:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$



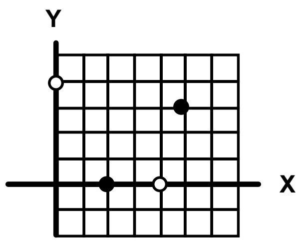
Así pues, para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones procederemos de la siguiente manera:

Sea el sistema: $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

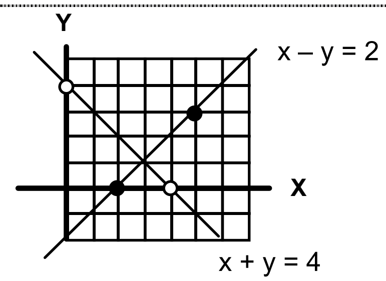
1º Hallar un par de soluciones de cada ecuación y llevarlas al plano:

(0, 4) y (4, 0) de la primera

(2, 0) y (5, 3) de la segunda

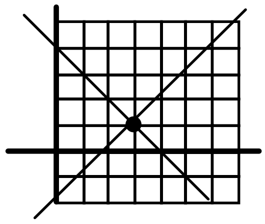


2º Trazar la recta que las contiene:



3º El punto de corte de las dos rectas es la solución del sistema de ecuaciones. Es decir,

$x = 3; y = 1$



Para resolver sistemas de ecuaciones por este método debes usar un papel cuadriculado. Es conveniente que compruebes la solución.

6. PROBLEMAS

Para resolver los problemas procederemos como en los sistemas de una ecuación y una incógnita:

PLANTEAMIENTO:

1. Localizar las incógnitas.
2. Expresar el enunciado en función de ellas
3. Plantear el sistema de ecuaciones

RESOLUCIÓN:

4. Resolverla

Solución:

5. Redactar la solución.

Comprobación:

6. Comprobar la solución.

Ejemplo: Hallar dos números cuya suma es 12 y su diferencia es 2.

Planteamiento	**Resolución**:
1. Incógnitas: $\left\vert \begin{array}{l} x \text{ –un n°} \\ y \text{ – otro n°} \end{array} \right.$ 2. Expresar el enunciado: $x + y = 12$ (la suma 12) $x - y = 2$ (la resta 2) 3. Plantear $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$	
Solución:	**Comprobación:**